

SUBJECT:

10
17

الخامسة الخامسة: المؤثر القاطن العكسي $\frac{1}{\varphi(0)}$ دالة الأسي e^{mx}

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi(m)} \cdot e^{mx} \quad \text{و} \quad \varphi(m) \neq 0$$

الإثبات: نعلم أن:

$$\varphi(0) \cdot e^{mx} = \varphi(m) \cdot e^{mx}$$

لنؤثر على الطرفين بالمؤثر القاطن العكسي $\frac{1}{\varphi(0)}$ فنجد أن:

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot \varphi(0) \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi(0)} \cdot \varphi(m) \cdot e^{mx}$$

أي أن:

$$e^{mx} = \varphi(m) \cdot \frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx}$$

• وإذا كان $\varphi(m) \neq 0$ عندئذ:

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi(m)} \cdot e^{mx}$$

مثال: أوجد ناتج

$$\frac{1}{0^3 - 20^2 + 30 + 7} \cdot e^x = \frac{1}{9} \cdot e^x$$

$$\varphi(0) = 0^3 - 20^2 + 30 + 7$$

$$\varphi(1) = 1 - 2 + 3 + 7 = 9$$

• أما إذا كانت $\varphi(m) = 0$ فما ينبغي $D=M$ مع موضع صفري للدالة $\varphi(0)$ أو جذر للمعادلة $\varphi(0) = 0$.

ملاحظة: نقول عن x أيضا موضع صفري للدالة $f(x)$ من الدرجة k عندما:

$$f(x) = f'(x) = \dots = f^{(k-1)}(x) = 0 \quad \wedge \quad f^{(k)}(x) \neq 0$$

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(0) \neq 0$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \Rightarrow f(0) = 0$$

تحليل:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 24x - 12 \Rightarrow f'''(0) = -12 \neq 0$$

٢- بناءً على هذا القريب إذا كانت $D=M$ مفرق الدرجة الأخرى للمؤثر التفاضلي

$$\varphi(0) = (D-M) \cdot \varphi(0), \varphi(M) \neq 0 \text{ عندئذ:}$$

$$\varphi'(0) = \varphi(0) + (D-M) \cdot \varphi(0)$$

$$\varphi'(M) = \varphi(M) + 0$$

مما يعني أن:

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(D-M) \cdot \varphi(0)} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{(D-M)} \cdot \frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{D-M} \cdot \frac{1}{\varphi(M)} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{\varphi(M)} \cdot \frac{1}{D-M} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi(M)} \cdot x \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi'(M)} \cdot x \cdot e^{mx}$$

↵

$$f(x) = (x^4 + 3x + 2) x^2$$

مبتدأ

$$x^2 = 0 \quad x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 0 \quad (x+1)(x+2) = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -2$$

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 + 9x + 4$$

$$f''(0) = 4 \neq 0$$

$$f(x) = (x-0)^2 \cdot \varphi(x) \quad \varphi(x) \neq 0$$

$$f(x) = (x+1) (x^3 + 2x^2)$$

$$f(-1) = 0, \quad f'(-1) = 1 \neq 0$$

SUBJECT:

$$f(x) = (x+2)(x^3 + x^2)$$

$$x = -2$$

في المثال الثاني: عند $D=M$ صفر من الدرجة الأولى لـ $\varphi(0)$ فإن:

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{x \cdot e^{mx}}{\varphi'(0)} \Big|_{D=M}$$

مثال توضيحي: أوجد ناتج:

$$\frac{1}{D^3 - D} \cdot e^x = \frac{x \cdot e^x}{3D^2 - 1} \Big|_{D=1} = \frac{x \cdot e^x}{2}$$

$$\varphi(0) = D^3 - D$$

$$\varphi(1) = 1 - 1 = 0$$

نلاحظ بأن $m=1$

$$\varphi'(0) = 3D^2 - 1$$

$$\varphi'(1) = 3 - 1 = 2 \neq 0$$

إذا كان $D=M$ صفر من الدرجة الثانية لـ $\varphi(0)$

$$\varphi(0) = (D-M)^2 \cdot \psi(0) \quad ; \quad \psi(M) \neq 0$$

$$\varphi'(0) = 2(D-M) \cdot \psi(0) + (D-M)^2 \cdot \psi'(0) \quad \varphi'(M) = 0$$

$$\varphi''(0) = 2\psi(0) + 4(D-M) \cdot \psi'(0) + (D-M)^2 \cdot \psi''(0)$$

$$0 \neq \varphi''(M) = 2\psi(M) + 0 + 0 \quad \psi(M) \neq 0$$

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(D-M)^2 \psi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(D-M)^2} \cdot \frac{1}{\psi(0)} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{(D-M)^2} \cdot \frac{1}{\psi(M)} \cdot e^{mx} \quad \psi(M) \neq 0$$

$$= \frac{1}{\psi(M)} \cdot \frac{1}{(D-M)^2} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\psi(M)} \cdot \frac{x^2 \cdot e^{mx}}{2}$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{mx}}{2 \psi(M)}$$

أي أن:

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{x^2 \cdot e^{mx}}{\varphi''(0)} \Big|_{D=M}$$

SUBJECT:

$$\varphi(m) = \varphi'(m) = 0 \wedge \varphi''(m) \neq 0$$

مثال توضيحي: أوجد ناتج ما يلي:

$$\frac{1}{D^3 + 7D^2 + 15D + 9} \cdot e^{-3x} = \frac{x^2 \cdot e^{-3x}}{-4}$$

$$\varphi(0) = 0^3 + 7 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 9 \quad ; m = -3$$

$$\varphi(-3) = -27 + 63 - 45 + 9 = 0$$

$$\varphi'(0) = 3 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 + 15$$

$$\varphi'(-3) = 27 - 42 + 15 = 0$$

$$\varphi''(0) = 6 \cdot 0 + 14$$

$$\varphi''(-3) = -18 + 14 = -4 \neq 0$$

إذا كانت $D = m$ ففرض الدرجة l لـ $\varphi(0)$ عندئذ:

$$\varphi(0) = (0-m)^l \cdot \psi(0) \quad \psi(m) \neq 0$$

$$\varphi^{(l)}(0) = (\varphi^{(l)}(0) \cdot (0-m)^l + l \cdot \varphi(0)^{l-1} (0-m)^{l-1} + \frac{l \cdot (l-1)}{2!} \varphi(0)^{l-2} \cdot l(l-1) \cdot (0-m)^{l-2} + \dots + \varphi(0) \cdot l!)$$

$$\varphi^l(m) = \psi^l(m) \cdot l!$$

$$\varphi^l(m) \neq 0 \Rightarrow \psi(m) \neq 0$$

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(0-m)^l} \cdot \frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} \quad \text{عندئذ}$$

$$= \frac{1}{(0-m)^l} \cdot \frac{1}{\psi(m)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\psi(m)} \cdot \frac{1}{(0-m)^l} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{\psi(m)} \cdot \frac{x^l \cdot e^{mx}}{l!}$$

$$= \frac{x^l \cdot e^{mx}}{\psi(m) \cdot l!}$$

SUBJECT:

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot e^{mx} = \frac{x^1 \cdot e^{mx}}{\varphi'(0) |_{D=m}} \quad \text{أي } 1$$

$$\varphi(m) = \varphi'(m) = \dots = \varphi^{(m)}(m) = 0 \wedge \varphi^{(m+1)}(m) \neq 0 \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{(D-2)^5(D+1)^2} e^{2x} = \frac{x^5 \cdot e^{2x}}{[(D-2)^5(D+1)^2]^{(5)}}_{D=2} \quad \text{أي } 1$$

$$(D+1)^2 = D^2 + 2D + 1$$

$$(D-2)^5 = D^5 - 10D^4 + 40D^3 - 80D^2 + 80D - 32$$

أي

$$(D-2)^5(D+1)^2 = D^7 - 8D^6 + 21D^5 - 10D^4 - 40D^3 + 78D^2 + 76D - 32$$

$$\varphi'(D) = 7D^6 - 48D^5 + 105D^4 - 40D^3 - 120D^2 + 156D + 76$$

$$\varphi''(D) = 42D^5 - 240D^4 + 420D^3 - 120D^2 - 240D + 156$$

$$\varphi'''(D) = 210D^4 - 960D^3 + 1260D^2 - 240D - 240$$

$$\varphi^{(4)}(D) = 840D^3 - 2880D^2 + 2520D - 240$$

$$\varphi^{(5)}(D) = 2520D^2 - 5760D + 2520$$

$$2520 \cdot 4 - 5760 \cdot 2 + 2520 = 10080 - 11520 + 2520 = 1080$$

$$\frac{1}{(D-2)^5} \cdot \frac{1}{(D+1)^2} e^{2x} = \frac{1}{(D-2)^5} \cdot \frac{1}{9} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(D-2)^5} e^{2x} = \frac{x^5 \cdot e^{2x}}{9 \cdot 5!}$$

$$\varphi^{(5)}(2) = 1080$$

مثال أوجد ناتج:

$$\frac{1}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1} \cdot e^{-x} = \frac{x^3 \cdot e^{-x}}{6}$$

ط

$$\varphi(D) = D^3 + 3D^2 + 3D + 1 ; m = -1$$

$$\varphi(-1) = 1 - 1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

$$\varphi'(D) = 3D^2 + 6D + 3$$

$$\varphi'(-1) = 3 - 6 + 3 = 0$$

$$\varphi''(D) = 6D + 6$$

$$\varphi''(-1) = -6 + 6 = 0$$

$$\varphi'''(D) = 6$$

$$\varphi'''(-1) = 6 \neq 0$$

$$\frac{1}{(D+1)^3} \cdot e^{-x} = \frac{x^3 \cdot e^{-x}}{3!}$$

ط

الخاصة السادسة: "خاصة الزمرة الأسية"

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = V(x) = e^{mx} \cdot \frac{1}{\varphi(D+m)} \cdot V(x)$$

الأمثلة:

لنفرض أن $\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} \cdot V(x) = u(x)$ لنفرض أن:

$$\varphi(D) \cdot u(x) = \varphi(D) \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} \cdot V(x)$$

$$\varphi(D) \cdot u(x) = e^{mx} \cdot V(x)$$

$$\varphi(D) \cdot e^{-mx} \cdot e^{mx} \cdot u(x) = e^{mx} \cdot V(x)$$

وبالتالي فإن:

$$e^{mx} \cdot \varphi(D+m) \cdot e^{-mx} \cdot u(x) = e^{mx} \cdot V(x)$$

أبأ:

$$\varphi(D+m) \cdot e^{-mx} \cdot u(x) = z(x)$$

فؤثر على الطرفين بالمؤثر القاطن العكسي

$$\frac{1}{\varphi(D+m)}$$

$$e^{-mx} u(x) = \frac{1}{\varphi(D+m)} \cdot z(x)$$

بهذه طرفي المعادلة من اليسار بـ e^{mx} .

$$u(x) = e^{mx} \cdot \frac{1}{\varphi(D+m)} \cdot z(x)$$

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} \cdot x(x) = e^{mx} \cdot \frac{1}{\varphi(D+m)} \cdot v(x)$$

أبأ:

ملاحظة: العديد من الحالات الخاصة من الخاصة الرابعة يمكن اتباعها على هذه الخاصة:

$$\frac{1}{D-m} \cdot e^{mx} = e^{mx} \cdot \frac{1}{0} \cdot 1 = x e^{mx}$$

$$\frac{1}{(D-m)^2} e^{mx} = e^{mx} \cdot \frac{1}{0^2} \cdot 1 = \frac{x^2}{2} e^{mx}$$

الخاصة السابعة: المؤثر القاطن العكسي والدوال المثلثية $\cos ax$ و $\sin ax$.

أبأ: عندما يتغير المؤثر القاطن العكسي على قوى D الزوجية فقط عندما:

$$\frac{1}{D-m} \cos ax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \cos ax = \frac{1}{\varphi(1-a^2)} \cdot \cos ax ; \varphi(1-a^2) \neq 0$$

$$\frac{1}{D-m} \sin ax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \sin ax = \frac{1}{\varphi(1-a^2)} \cdot \sin ax ; \varphi(1-a^2) \neq 0$$

أبأ: الخاصة الثامنة:

$$\varphi(D^2) \cos ax = \varphi(1-a^2) \cdot \cos ax$$

نعلم أن

فؤثر على الطرفين بالمؤثر القاطن العكسي فنجد أنه:

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}$$

$$\cos ax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \varphi(1-a^2) \cdot \cos ax$$

$$\cos ax = \varphi(1-a^2) \cdot \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \cos ax$$

نقسم طرفي المعادلة على $\varphi(1-a^2)$ $\neq 0$

$$\frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \cos ax = \frac{1}{\varphi(1-a^2)} \cdot \cos ax, \quad \varphi(1-a^2) \neq 0$$

بطريقة مشابهة تماماً نثبت أن $\sin ax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \varphi(1-a^2) \cdot \sin ax$

مثال 1: أوجدنا نتج ؟

$$\frac{1}{D^4 + D^2} \cos x = \frac{1}{-2} \cos x$$

$a=1$;
 $\varphi(D^2) = (D^2)^3 + D^2$
 $\varphi(1) = \varphi(1-a^2)$
 $\varphi(1) = (-1)^3 + 1 = -2 \neq 0$

مثال 2: أوجدنا نتج ؟

$$\frac{1}{D^4 + D^2 + 1} \sin 2x = \frac{1}{13} \sin 2x$$

$$\varphi(D^2) = (D^2)^2 + D^2 + 1$$

$$\varphi(-4) = (-4)^2 - 4 + 1$$

$$= 13 \neq 0$$

$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$
 $\text{Re } e^{iax} = \cos ax$
 $\text{Im } e^{iax} = \sin ax$

* عندما $\varphi(1-a^2) = 0$ عندما φ يحتوي على D المتكافئة

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cos ax = \frac{\text{Re} \left[\frac{e^{iax}}{\varphi(D)} \right]}{\text{Im} \left[\frac{e^{iax}}{\varphi(D)} \right]} = \frac{\text{Re} \left[\frac{e^{iax}}{\varphi(D)} \right]}{\text{Im} \left[\frac{e^{iax}}{\varphi(D)} \right]}$$

$$= \frac{\text{Re} \left[\frac{x \cdot e^{iax}}{\varphi'(ia)} \right]}{\text{Im} \left[\frac{x \cdot e^{iax}}{\varphi'(ia)} \right]}$$

$\varphi(ia) = \varphi'(ia) = \dots = \varphi^{(n-1)}(ia) = 0$
 $\varphi^{(n)}(ia) \neq 0$

ملاحظة: يمكن إثبات صحة العلاقاتين:

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \cos ax = \frac{x}{2a} \sin ax$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \sin ax = -\frac{x}{2a} \cos ax$$

لنثبت صحة هاتين العلاقاتين اعتماداً على هذه الخاصية.

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot e^{iax} = \frac{1}{D^2+a^2} (\cos ax + i \sin ax)$$

$$= \frac{1}{D^2+a^2} \cdot \cos ax + i \frac{1}{D^2+a^2} \cdot \sin ax \quad *$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot e^{iax} = \frac{x \cdot e^{iax}}{2ia}$$

$$= \frac{x}{2ia} (\cos ax + i \sin ax)$$

$$= \frac{x}{2a} (\sin ax - i \cos ax)$$

$$= \frac{x}{2a} \sin ax - i \frac{x}{2a} \cos ax \quad **$$

$$\varphi(0) = D^2 + a^2$$

$$\varphi(ia) = -a^2 + a^2 = 0$$

$$\varphi'(0) = 2a$$

$$\varphi'(ia) = 2ia \neq 0$$

بمقارنة * مع ** ننتج أن:

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \cos ax + i \frac{1}{D^2+a^2} \cdot \sin ax = \frac{x}{2a} \sin ax - i \frac{x}{2a} \cos ax$$

واعتباراً على كلا وجهي عددي عقدي ينتج أن:

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \cos ax = \frac{x}{2a} \sin ax$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \sin ax = -\frac{x}{2a} \cos ax$$

SUBJECT:

$$\frac{1}{D^3 + D^2 - D - 1} \cdot \sin x$$

مثال: أو جابج

$$= \frac{1}{D \cdot D^2 + D^2 - D - 1} \cdot \sin x = \frac{1}{-D - 1 - D - 1} \cdot \sin x$$

$$= \frac{1}{-2D - 2} \cdot \sin x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D+1} \cdot \sin x$$

$$\frac{1}{D-m} \cdot \sin ax = \frac{1}{a^2 + k^2} (-a \cos ax - m \sin ax)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+1} [\cos x + \sin x] \right] = -\frac{1}{4} [\cos x + \sin x]$$

$$\frac{1}{D^3 + D^2 - D - 1} \cdot \sin x = \operatorname{Im} \left[\frac{e^{ix}}{D^3 + D^2 - D - 1} \right]$$

$$\varphi(D) = D^3 + D^2 - D - 1$$

$$\varphi(i) = i^3 + i^2 - i - 1 = -i - 1 - i - 1$$

$$= -2i - 2 = -2(1+i)$$

$$= \frac{1}{D^3 + D^2 - D - 1} \cdot \sin x = \operatorname{Im} \cdot \frac{e^{ix}}{-2(1+i)} = \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-i)e^{ix}}{2} \right]$$

$$= \operatorname{Im} \left\{ -\frac{1}{4} [(1-i)(\cos x + i \sin x)] \right\}$$

$$= \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{4} [(\cos x + \sin x) + i(1 - \cos x + \sin x)] \right]$$

$$= -\frac{1}{4} (-\cos x + \sin x)$$